ಇಸ್ಪೀಟೆಲೆ ಇಂದ್ರಜಾಲದ ಮೂಲಕ
ತ್ರಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯ ಕಲಿಕೆ

ಆಂಗ್ಲ ಮೂಲ:ಸುಹಾಸ್ ಸಾಸಹಾ
ಕನ್ನಡಾನುವಾದ: ವಿಶ್ವನಾಥ್,
ಚೈತನ್ಯ ಅಸೋಸಿಯೇಟ್ಸ್, ಮೈಸೂರು

ತಕ್ಕಮಟ್ಟಿಗೆ ಮುಂದುವರಿದ ಯಾವುದೇ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನವು
ಇಂದ್ರಜಾಲದಿಂದ ಬೇರ್ಪಡಿಸಲಾಗದಂತಿರುತ್ತದೆ
—ಆರ್ಥರ್ ಸಿ ಕ್ಲಾರ್ಕ್, "ಪ್ರೊಫೈಲ್ಸ್ ಆಫ್ ದ ಫ್ಯೂಚರ್:
ಇಂಕ್ವಯಿರಿ ಇಂಟು ದ ಲಿಮಿಟ್ಸ್ ಆಫ್ ದ ಫ್ಯೂಚರ್"

ಇಂದ್ರಜಾಲ ಅಥವಾ ಕಣ್ಕಟ್ಟುಗಳು ಮಕ್ಕಳ ಹಾಗೂ ವಯಸ್ಕರ ಗಮನವನ್ನು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಸೆಳೆಯುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅದು ಟೋಪಿಯಿಂದ ಮೊಲಗಳನ್ನು ಹೊರಸೆಳೆಯುವುದಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಇಸ್ಪೀಟೆಲೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ತೋರಿಸುವ ಇನ್ನೂ ಸಂಕೀರ್ಣರೂಪದ ಇಂದ್ರಜಾಲವಾಗಿರಬಹುದು. ನಾವು ನಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳು ಗಣಿತದ ಬಗ್ಗೆ ಆಸಕ್ತಿ ಕೆರಳಿಸಲು ಇಸ್ಪೀಟೆಲೆಯ ಕಣ್ಕಟ್ಟನ್ನು ಬಳಸುವ ಯೋಜನೆಯೊಂದನ್ನು ಹಮ್ಮಿಕೊಂಡೆವು. ಎಲ್ಲಾ ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಂದಲೂ ಇದಕ್ಕೆ ಕಂಡುಬಂದ ಗುಣಾತ್ಮಕ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ನಮಗಾದ ಅಚ್ಚರಿ ಹಿತ ನೀಡಿತ್ತು.

ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ 27 ಇಸ್ಪೀಟೆಲೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಮಾಡುವ ಕಣ್ಕಟ್ಟಿನ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಇಸ್ಪೀಟೆಲೆ ಕಣ್ಕಟ್ಟು

ಇಸ್ಪೀಟೆಲೆಗಳ ಒಂದು ಇಡೀ ಕಟ್ಟನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿನ ಜೋಕರ್ ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಕಲಸಿ. ಅದರಿಂದ 27 ಎಲೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಅವನ್ನು ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ಇಟ್ಟು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ತರಗತಿಗೆ ತೋರಿಸುವಂತೆ ಹೇಳಿ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡ ಎಲೆಯನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವಂತೆ ತರಗತಿಗೆ ಬೆನ್ನು ಮಾಡಿ ನಿಂತಿರಿ ಅಥವಾ ನಿಮ್ಮ ಕಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮುಚ್ಚಿಕೊಂಡಿರಿ). ಅದನ್ನು ಮರಳಿ ಕಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸುವಂತೆ ತಿಳಿಸಿ. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಈ ಎಲೆಯನ್ನು ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯು ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಕಳೆದುಹೋಗಿದೆ ಎಂದು ಅನಿಸುವವರೆಗೂ ಎಲೆ ಎತ್ತಿತೋರಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಕಟ್ಟಿನ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತೆ-ಮತ್ತೆ ಕಲಸಲು ಹೇಳಿ. ಈಗ ಕಟ್ಟನ್ನು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಪಡೆದು ಮೂರು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯನ್ನು ಬಯಲುಮಾಡುವವರಿದ್ದೀರಿ ಎಂದು ನಾಟಕೀಯವಾಗಿ ಘೋಷಿಸಿ.

ನಮ್ಮ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ "ಇಸ್ಪೀಟ್. 9" ಆಗಿರಲಿ. ಇದಕ್ಕೆ ನಾವು 9S ಎಂಬ ಸಂಕೇತ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ 9D "ಡಯ್ಮಂಡ್ 9"ಕ್ಕೆ, 9C "ಕಳಾವರು 9"ಕ್ಕೆ ಹಾಗೂ 9H "ಆಟೀನು 9"ಕ್ಕೆ ಸಂಕೇತಗಳಾಗಿರಲಿ. ಮೊದಲ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಎಲೆಗಳು ಕಾಣುವಂತೆ ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ (ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲೂ 9 ಎಲೆಗಳಿರುವಂತೆ) ಹಂಚಿ. ಪ್ರೇಕ್ಷಕರು ಏನಾಗುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತಿರಲಿ.

FIGURE 1

ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಮೊದಲ ಎಲೆ 9D, ಎರಡನೆಯದು 4D, ಮೂರನೆಯದು 3S, ಹಾಗೂ ನಾಲ್ಕನೆಯದು 10S ಇತ್ಯಾದಿ. ಇಲ್ಲಿನ 25, 26, 27ನೇ ಎಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4S, 7S ಮತ್ತು 5D ಆಗಿವೆ. ಈಗ ಮೊದಲ ಗುಂಪಿನ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ 25ನೇ ಎಲೆಯು ಕಾಣುವಂತೆ ಮೊದಲು ಬರುವಂತೆಯೂ, 1ನೇ

ಎಲೆ ಗುಂಪಿನ ತಳದಲ್ಲಿ ಬರುವಂತೆಯೂ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳ ಎಲೆಗಳನ್ನೂ ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 27ನೇ ಎಲೆ ಮೂರನೇ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲಿನ ಎಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದಾದರೆ, 3ನೇ ಎಲೆ ತಳದ ಎಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ಎಲೆ ಎತ್ತಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಯಾವ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾನೆ.

FIGURE 2

ಮೂರೂ ಗುಂಪುಗಳ ಎಲೆಗಳನ್ನೂ, ಎಲೆಗಳು ಕಾಣದಂತೆ ಮಗುಚಿ ಇಡಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಅಂಗೈ ಮೇಲೆ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದರಂತೆ ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪು ಉಳಿದೆರಡು ಗುಂಪುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಿ. ನಮ್ಮ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಮೂರನೇ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ, ಈ ಗುಂಪನ್ನು ಒಂದು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಗುಂಪುಗಳ ನಡುವೆ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ನೀವು ಮೊದಲು ಎರಡನೇ ಗುಂಪನ್ನು ಅಂಗೈಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಬಳಿಕ ಮೂರನ್ನು ಅದರ ಮೇಲಿಟ್ಟು, ಕೊನೆಗೆ ಒಂದನೇ ಗುಂಪನ್ನು ಎಲ್ಲದರ ಮೇಲೆ ಇಡಬೇಕು. ಬೇರೆ ರೀತಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಎರಡನೇ ಗುಂಪು ಅಡಿಯಲ್ಲಿಯೂ, ಮೂರನೆ ಗುಂಪು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿಯೂ, ಒಂದನೇ ಗುಂಪು ಮೇಲೆಯೂ ಇರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಹಂತ 2 ಮತ್ತು 3ರಲ್ಲಿ ನಾವು 27 ಎಲೆಗಳನ್ನು ಕಾಣುವಂತೆ ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಹಂಚುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿ ಬಾರಿಯೂ ಎಲೆ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಯಾವ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಇದೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಕೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಹಂತದ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಂಡು ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಮತ್ತೆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪು ಉಳಿದೆರಡು ಗುಂಪುಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೂರು ಹಂತಗಳ ಬಳಿಕ ನಾವೀಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಅನಾವರಣಕ್ಕೆ ಸಿದ್ಧರಾಗಿದ್ದೇವೆ.

FIGURE 3

ಚಿತ್ರ 2ರಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿರುವ ಎಲೆಗಳು ಹೇಗೆ ಕಾಣುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಚಿತ್ರ 2ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಒಂದನೇ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಒಂದನೇ ಗುಂಪು ಉಳಿದೆರಡು ಗುಂಪುಗಳ ನಡುವೆ ಸೇರುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ನೀವು ಎತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಗುಂಪು ಮೇಲಿದೆ ಎಂದೂ, ಒಂದನೇ ಗುಂಪು ಮಧ್ಯದಲ್ಲೂ, ಮೂರನೇ ಗುಂಪು ಕೆಳಗಿದೆ ಎಂದು ಅಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮೂರನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿರುವ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 3ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಮತ್ತೆ ಮೂರನೆ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ನೀವು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವ ಕ್ರಮದ ಪ್ರಕಾರ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಮೂರನೇ ಗುಂಪು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆ. ಮೂರನೇ ಹಂತದ ಕೊನೆಗೆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಸದಾ ಮೇಲಿನಿಂದ (ಅಥವಾ ಕೆಳಗಿನಿಂದ) 14ನೇ ಎಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅಂದರೆ, ಇದು ಕಟ್ಟಿನ ಮಧ್ಯದೆಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಚಿತ್ರ 3ರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

FIGURE 4

ಈಗ ನಿಮ್ಮ ಕೈಯಲ್ಲಿರುವ ಕಟ್ಟಿನ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದೆಯೇ ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಹರವಿ (ಎಲೆಗಳು ಕಾಣುವಂತೆ ಅಥವಾ ಕಾಣದಂತೆ ಹರವುವುದು ನಿಮ್ಮ ಇಚ್ಛೆಗೆ ಬಿಟ್ಟದ್ದು), ಆದರೆ 14ನೇ ಎಲೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಗಮನಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಎಲ್ಲಾ ಎಲೆಗಳನ್ನೂ ಹರವಿದ ಬಳಿಕ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಎಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯದಂತೆ ಸೋಗುಹಾಕಿ. ನೀವು ಇಂದ್ರಜಾಲ ತೋರಿಸುವಿರೆಂದು ಘೋಷಿಸಿ ಸೋತಿದ್ದೀರಿ ಎಂದು ಪ್ರೇಕ್ಷಕರು ಇನ್ನೇನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿದ್ದಾರೆ ಎನ್ನುವಷ್ಟರಲ್ಲಿ 14ನೇ ಎಲೆಯತ್ತ ಬೊಟ್ಟುಮಾಡಿ, ಅದೇ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಎಂದು ಎಲ್ಲರಿಗೂ

ತಿಳಿಯುವಂತೆ ಘೋಷಿಸಿ. ಪ್ರೇಕ್ಷಕರಿಂದ ಅಚ್ಚರಿಯ ಚಪ್ಪಾಳೆ ಗಿಟ್ಟಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಗಮ್ಮತ್ತನ್ನು ಸವಿಯುವುದು ಈಗ ನಿಮ್ಮ ಸರದಿ.

ಈ ಕಣ್ಕಟ್ಟಿನ ಹಿಂದಿನ ತರ್ಕವೇನು?

ಈ ಕಣ್ಕಟ್ಟಿನ ಹಿಂದಿನ ತರ್ಕವೇನು? ನಿಮ್ಮ ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ, ಎಲೆ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕಟ್ಟನ್ನು ಮನದಣಿಯ ಕಲಸಿ ನಿಮಗೆ ಹಿಂದಿರುಗಿ ಇತ್ತ ಬಳಿಕ ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು n ಇಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ (ಮೇಲಿನನಿಂದ ಎಣಿಸಿದಾಗ). ಹೀಗಾಗಿ, $1 \le n \le 27$. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $n = 15$ ಆದರೆ, ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ 14 ಎಲೆಗಳಿವೆ ಹಾಗು ಕೆಳಗೆ 12 ಎಲೆಗಳಿವೆ ಎಂದರ್ಥ. ಈಗ ನಾವು ಮೊದಲನೇ ಹಂತದ ಬಳಿಕ, ಅಂದರೆ, ಮೊದಲಸಲ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಹಂಚಿ, ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಗುಂಪು ಉಳಿದೆರಡು ಗುಂಪುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಂಡು ಅವುಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಕಟ್ಟುಕಟ್ಟಿದಾಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಎಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕೋಣ.

ಎಲೆಗಳನ್ನು ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಹಂಚಿದಾಗ ಕಟ್ಟಿನ ಮೊದಲ, ಎರಡನೆಯ ಹಾಗೂ ಮೂರನೆಯ ಎಲೆಗಳು ಕ್ರಮೇಣ ಹೊಸ ಗುಂಪು I,II ಮತ್ತು IIIರ ಮೊದಲ ಎಲೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ನಾಲ್ಕನೆಯ, ಐದನೆಯ ಹಾಗೂ ಆರನೆಯ ಎಲೆಗಳು ಕ್ರಮೇಣ ಹೊಸ ಗುಂಪು I,II ಮತ್ತು IIIರ ಎರಡನೆಯ ಎಲೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದೆಯೂ ಎಲೆಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಕಟ್ಟಿನ ಹದಿನಾರನೇ, ಹದಿನೇಳನೇ ಹಾಗೂ ಹದಿನೆಂಟನೇ ಎಲೆಗಳು ಕ್ರಮೇಣ ಹೊಸ ಗುಂಪು I,II ಮತ್ತು IIIರ ಆರನೇ ಎಲೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ನಾವು ಗಣಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನವೊಂದರ ರಚನೆಗೆ ಮುಂದಾಗುತ್ತೇವೆ. ಇದು ನಾವು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದ ಎಲೆಗೆ ಕಟ್ಟಿನ 27 ಎಲೆಗಳನ್ನು ಒಂಬತ್ತರ ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಹಂಚಿದಾಗ ಆಯ್ದ ಎಲೆಯ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹೊಂದಿಸುತ್ತದೆ.

- n ಏನಾದರೂ 3ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ, $n = 3m$ ಆದರೆ, n ನ ಹೊಸ ಸ್ಥಾನ ಮೂರನೆಯ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿದ್ದು, ಅದು ಅಲ್ಲಿ m ನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಅಲಂಕರಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮೊದಲಿಗೆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಸ್ಥಾನ $n = 12$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಮುಂದಿನ ಹಂತದ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಈ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಮೂರನೇ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನೇ ಎಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಈಗ n ಎಂಬುದು 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $n = 20$ ಆಗಿರಲಿ. 20 ಎಂಬುದು 18 ಮತ್ತು 21ರ ನಡುವೆ ಇದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ (ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 20ರ ಹಿಂದಿನ ಹಾಗೂ ಮುಂದಿನ 3ರ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು). ಈಗಾಗಲೇ 18 ಎಲೆಗಳನ್ನು ಮೂರರ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ (ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲೂ ಆರರಂತೆ) ಹಂಚಿರುವುದರಿಂದ, 19ನೇ ಎಲೆ ಮೊದಲ ಗುಂಪಿನ 7ನೇ ಎಲೆಯಾಗುತ್ತದೆ, 20ನೇ ಎಲೆ ಎರಡನೇ ಗುಂಪಿನ 7ನೇ ಎಲೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ 21ನೇ ಎಲೆ ಮೂರನೇ ಗುಂಪಿನ 7ನೇ ಎಲೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

  ಈಗ,

$$\frac{19}{3} = 6 + \frac{1}{3}, \qquad \frac{20}{3} = 6 + \frac{2}{3}, \qquad \frac{21}{3} = 7.$$

ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ.

ಹೀಗಾಗಿ, ನಾವು ಹುಡುಕುತ್ತಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನ f ನ ಬೆಲೆಗಳು: $f(19) = 7$, $f(20) = 7$ ಮತ್ತು $f(21) = 7$ ಆಗಿರಬೇಕು. ಈ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವು, "ಸೀಲಿಂಗ್" ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ:

$$f(n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, \qquad (1)$$

($\lceil x \rceil$ ನ ಬೆಲೆ x ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ಅತ್ಯಂತ ಸಣ್ಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ. ಉದಾಹರಣೆಗಳು: $\lceil 1.7 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 8 \rceil = 8$.)

ಕೆಳಗಿನ ನಮ್ಮ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಸೀಲಿಂಗ್ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಮತ್ತೆ-ಮತ್ತೆ ಬಳಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ನೀವೇ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಯತ್ನಿಸಿ:

ಪ್ರಮೇಯ. m ಮತ್ತು n ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಜಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ, ಆಗ

$$\left\lceil \frac{\lceil m \rceil}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil .$$

ಒಂದನೇ ಹಂತದ ಬಳಿಕ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದ ಎಲೆಯ ಸ್ಥಾನ

ಮೇಲೆ ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸಿದ ಸಂಗತಿಗಳಿಂದ ಇದನ್ನು ತರ್ಕಬದ್ಧವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು: ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದ ಎಲೆಯ ಆರಂಭಿಕ ಸ್ಥಾನ n_0 ಆಗಿರಲಿ. ಒಂದನೇ ಹಂತದ ಬಳಿಕ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೂ 9 ಎಲೆಗಳು ಇರುತ್ತವಾದ್ದರಿಂದ, ಅದರ ಹೊಸ ಸ್ಥಾನವನ್ನು n_1 ಎಂದು ಕರೆದರೆ,

$$n_1 = 9 + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil . \qquad (2)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಾವು M ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪನ್ನು **ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ** ಸೇರಿಸಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಗಮನಸೆಳೆಯಲು ಇದನ್ನು M ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯೇನಾದರೂ $n_0 = 23$ ಎಂಬ ಆರಂಭಿಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದ್ದು, ಒಂದನೇ ಹಂತದ ಬಳಿಕ ಎಲೆಯ ಸ್ಥಾನವು n_1 ಎಂದಾದರೆ,

$$n_1 = M(23) = 9 + \left\lceil \frac{23}{3} \right\rceil = 17.$$

ಆಗುತ್ತದೆ.

ಎರಡನೇ ಹಂತದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಎಲೆ ಮೇಲಿನಿಂದ n_2 ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ:

$$\begin{aligned} n_2 = M(M(n_0)) &= 9 + \left\lceil \frac{n_1}{3} \right\rceil \\ &= 9 + \left\lceil \frac{17}{3} \right\rceil = 9 + 6 = 15. \end{aligned}$$

ಹೀಗಾಗಿ, 23ನೇ ಎಲೆ 15ನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಮೂರನೇ ಹಂತದ ಬಳಿಕ ಈ ಎಲೆಯ ಸ್ಥಾನ n_3 ಎಂದಾದರೆ,

$$\begin{aligned} n_3 = M(M(M(n_0))) &= 9 + \left\lceil \frac{n_2}{3} \right\rceil \\ &= 9 + \left\lceil \frac{15}{3} \right\rceil = 14. \end{aligned}$$

ಅಂದರೆ, ಈ ಕಣ್ಕಟ್ಟು ಕೆಲಸಮಾಡಲು, 1 ಮತ್ತು 27 ರ ನಡುವಿನ ಯಾವುದೇ n_0 ನ ಬೆಲೆಗೆ,

$$M(M(M(n_0))) = 14. \qquad (3)$$

ಆಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ತೋರಿಸಲು ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದು ಏನೆಂದರೆ:

$$n_3 = 9 + \left\lceil \frac{n_2}{3} \right\rceil,$$

$$n_2 = 9 + \left\lceil \frac{n_1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{27 + n_1}{3} \right\rceil,$$

$$\therefore \; n_3 = 9 + \left\lceil \frac{1}{3} \left\lceil \frac{27 + n_1}{3} \right\rceil \right\rceil$$

$$= 9 + \left\lceil \frac{27 + n_1}{9} \right\rceil = 12 + \left\lceil \frac{n_1}{9} \right\rceil.$$

ಇದೇ ರೀತಿ, ಮುಂದೆ:

$$n_1 = 9 + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{27 + n_0}{3} \right\rceil,$$

$$\therefore \; \left\lceil \frac{n_1}{9} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{9} \left\lceil \frac{27 + n_0}{3} \right\rceil \right\rceil = \left\lceil \frac{27 + n_0}{27} \right\rceil$$

$$= 1 + \left\lceil \frac{n_0}{27} \right\rceil = 1 + 1 = 2,$$

ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ, $[n_0/27] = 1$ ಹಾಗೂ n_0 ನ ಬೆಲೆ 1ರಿಂದ 27ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದೇ ಆಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ:

$$n_3 = M(M(M(n_0))) = 13 + \left\lceil \frac{n_0}{27} \right\rceil = 14. \quad (4)$$

ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ನಾವೀಗ ಗಮನಿಸಬೇಕಿರುವುದೇನೆಂದರೆ, 27 ಎಲೆಗಳಿರುವ ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ 14ನೇ ಎಲೆ ಕಟ್ಟಿನ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಕಣ್ಕಟ್ಟನ್ನು 21 ಎಲೆಗಳ ಕಟ್ಟನ್ನು ಬಳಸಿ, ಎಲೆಗಳನ್ನು 7 ರ ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಹಂಚಿ, ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿದ ಹಂತ I,II ಮತ್ತು IIIನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವ ಮೂಲಕವೂ ತೋರಿಸಬಹುದಿತ್ತು. ಮೂರು ಹಂತಗಳ ಬಳಿಕ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿಕೊಂಡ ಎಲೆಯು 11ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇದು 21 ಎಲೆಗಳ ಕಟ್ಟಿನ ಮಧ್ಯದ ಸ್ಥಾನವೂ ಹೌದು ([1] ನೋಡಿ).

ಕಣ್ಕಟ್ಟಿನ ವಿಸ್ತರಣೆ

ನಾವೀಗ ಮೇಲಿನ ಕಣ್ಕಟ್ಟನ್ನು ತ್ರಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಎಡೆಮಾಡುವಂತೆ ಬದಲಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. (ತ್ರಿಮಾನ ಎಂದರೇನು ಎಂಬ ವಿವರಣೆಗಾಗಿ ಬಾಕ್ಸ್ 1ನ್ನು ನೋಡಿ) ನಾವೀಗ ಉತ್ತರಿಸಲಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯೆಂದರೆ: ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದ ಎಲೆಯನ್ನು 14ನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ (ಅಂದರೆ, ಕಟ್ಟಿನ ಮಧ್ಯಭಾಗಕ್ಕೆ) ತರುವ ಬದಲು ನಾವು ಈ ಎಲೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತರಲು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ 27 ಎಲೆಗಳನ್ನು ಮುಖ ಕೆಳಗೆ ಮಾಡಿ ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಹರವಿ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೊಬ್ಬನನ್ನು ಕರೆದು ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಅದನ್ನು ಪ್ರೇಕ್ಷಕರಿಗೆ ತೋರಿಸಿ ಪುನಃ ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಹರವಿರುವ

ಕಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸಲು ತಿಳಿಸಿ. ಅವನು ಇದನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯನ್ನು ನೀವು ಯಾವುದೇ ಕಾರಣಕ್ಕೂ ನೋಡಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಲು ನಿಮ್ಮ ಬೆನ್ನು ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಕಡೆಗಿರಲಿ. ಈಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ 1ರಿಂದ 27ರ ಒಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (n ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ) ಆಯ್ಕೆಮಾಡಲು ಹೇಳಿ. ಅವನು ಅದನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಪ್ರೇಕ್ಷಕರಿಗೆ ಕಾಣುವಂತೆ 27 ಎಲೆಗಳ ಕಟ್ಟನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಕಲಸಿ. ಹಿಂದಿನ ಕಣ್ಕಟ್ಟಿಗಿಂತ ವಿಧಾನ ಸ್ವಲ್ಪ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಈಗ ನಿಮ್ಮ ಕೆಲಸ ಮೊದಲಿನಂತೆಯೇ ಮೂರು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ 9 ಎಲೆಗಳ ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಹರವಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವ ಮೂಲಕ ಮೂರನೆ ಹಂತದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ n ನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ (ಮೇಲಿನಿಂದ) ಬರುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ, ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲೂ ನೀವು ಎಲೆಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಎತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವ ಕ್ರಮ ಈ ಕಣ್ಕಟ್ಟು ಕೆಲಸಮಾಡಲು ನಿರ್ಣಾಯಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ನಾವಿದನ್ನು ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ವಿಶದಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: n = 23 ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ, ಮೂರನೆ ಹಂತ ಮುಗಿಯುವಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ 23ನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬಂದಿರಬೇಕು.

ಮೂರನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಈ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಹಂಚಿ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಕೇಳಿ, ಈ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಂಡು ಕಟ್ಟುಕಟ್ಟುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮತ್ತೆ ಕಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸುವುದನ್ನು ಮೂರು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ:

T: ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪನ್ನು ಉಳಿದೆರಡು ಗುಂಪುಗಳ ಮೇಲಿರಿಸುವುದು.
M: ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪನ್ನು ಉಳಿದೆರಡು ಗುಂಪುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರಿಸುವುದು
B: ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪನ್ನು ಉಳಿದೆರಡು ಗುಂಪುಗಳ ತಳದಲ್ಲಿರಿಸುವುದು.

ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯೇನಾದರೂ 23ನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರಬೇಕಾದರೆ ಅದರ ಮೇಲೆ 22 ಎಲೆಗಳಿರಬೇಕು. ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿಯೂ 9 ಎಲೆಗಳಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರದಿರುವ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಂಡು (ಅಂದರೆ, ಒಟ್ಟು 18 ಎಲೆಗಳನ್ನು) ಅವುಗಳನ್ನು ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲೆ ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇದು ಕ್ರಮ **(B)** ಆಗಿದೆ. ಇಷ್ಟರಿಂದಲೇ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ 23ನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರಲಾರದು ಎಂಬುದಂತೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ರಹಸ್ಯದೆಲೆ 1ನೇ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 7ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ನಾವೀಗ 2 ಮತ್ತು 3ನೇ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು 1ನೇ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲಿರಿಸಿ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಹಂಚಿದರೆ, ರಹಸ್ಯದೆಲೆ 18 + 7 = 25 ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು 23ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ನಾವು ಮೂರನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಹಂಚಿದಾಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ತನ್ನ ಗುಂಪಿನ 5ನೇ ಎಲೆಯಾಗುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಮಾಡುವುದಾದರೂ ಹೇಗೆ? ಮೂರನೆ ಹಂತದ ಮೊದಲಲ್ಲಿ ನಾವು 27 ಎಲೆಗಳನ್ನು ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಹಂಚಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವಾಗ 1, 2 ಮತ್ತು 3ನೇ ಗುಂಪಿನ 5ನೇ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಟ್ಟಿನ 13, 14, ಮತ್ತು 15ನೇ ಎಲೆಗಳು ಅಲಂಕರಿಸುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಎರಡನೇ ಹಂತದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳನ್ನೂ ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವಾಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಕಟ್ಟಿನ 13, 14 ಅಥವಾ 15ನೇ ಎಲೆಯಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಎರಡನೇ ಹಂತದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಕಟ್ಟಿನ 13, 14 ಅಥವಾ 15ನೇ ಎಲೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಂಡರಾಯಿತು. ಇದಾಗಬೇಕಾದರೆ, ನಾವು ಎರಡನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ **(M)** ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕು: ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ 9 ಎಲೆಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಉಳಿದೆರಡು ಗುಂಪುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಎರಡನೇ ಹಂತದ ಕೊನೆಗೆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ 13,

14 ಅಥವಾ 15ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಾತ್ರಿಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಇಷ್ಟು ಸಾಕೆ? ಎರಡನೇ ಹಂತದ ಮೊದಲಿಗೆ, ಅಂದರೆ ಕಟ್ಟನ್ನು ಹಂಚುವ ಮುನ್ನ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ 4, 5 ಅಥವಾ 6ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಇಷ್ಟು ಸಾಕು ಎಂದು ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು.

27 ಎಲೆಗಳ ಕಟ್ಟನ್ನು ಹರವಿದಾಗ ಕಟ್ಟಿನ 10ರಿಂದ 18ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಎಲೆಗಳು ತಮ್ಮ-ತಮ್ಮ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ 4, 5 ಅಥವಾ 6ನೇ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 11ನೇ ಎಲೆ ಎರಡನೇ ಗುಂಪಿನ 4ನೇ ಎಲೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ 15ನೇ ಎಲೆ ಮೂರನೇ ಗುಂಪಿನ 5ನೇ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಅಲಂಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, 16ನೇ ಎಲೆ ಮೊದಲ ಗುಂಪಿನ 6ನೇ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತುಂಬುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಎರಡನೇ ಹಂತದ ಮೊದಲಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಗುಂಪಿನ 4,5 ಅಥವಾ 6ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಹಂತದ ಕೊನೆಗೆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಕಟ್ಟಿನ 10 ಮತ್ತು 18ನೇ ಎಲೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮೊದಲ ಹಂತದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ **(T), (M), (B)** ಗಳಲ್ಲಿ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟುಕಟ್ಟಿ ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವ ಯಾವ ಕ್ರಿಯೆ ಇದನ್ನು ಖಾತ್ರಿಪಡಿಸುತ್ತದೆ? ಉತ್ತರ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ **(M)** ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲೆ 9 ಎಲೆಗಳು ಇದ್ದು, ರಹಸ್ಯದೆಲೆ 10ರಿಂದ 18ರ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಎಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ನಾವು ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯನ್ನು 23ನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತರಲು ಹಂತ III, II ಮತ್ತು Iರಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ **(B)**, **(M)**, **(M)** ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದರಿಂದ ಸಾಧ್ಯ. ನಾವು ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, **(T)** = 0, **(M)** = 1, **(B)** = 2 ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲು ಕಾರಣವೆಂದರೆ, **(T)**, **(M)** ಮತ್ತು **(B)** ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಮೂಲಕ ನಾವು 0, 1 ಮತ್ತು 2 ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲೆ ಇಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದಾಗಿದೆ. $23-1 = 22 = 2\times3^2 + 1\times3^1 + 1\times3^0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಮೇಲೆ (ನಮ್ಮ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ) 22 ಎಲೆಗಳಿರುವಂತೆ ಮಾಡಲು **(M)**, **(M)**, **(B)** ಸರಣಿಯ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದದರಿಂದ ಸಾಧ್ಯ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು 22ನ್ನು ತ್ರಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ವಿಧಾನವೇ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2. ಈಗ ***n*** = 21 ಆಗಿರಲಿ. ನಾವೀಗ ಯಾವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯು 21ನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

21 = 18 + 3 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೂರನೆ ಕ್ರಿಯೆಯು **(B)** ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲೆ 18 ಎಲೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಇಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯು ಮೂರನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಗುಂಪಿನ ಮೂರನೆ ಎಲೆಯಾಗಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯು ಮೂರನೇ ಹಂತದ ಮೊದಲಿಗೆ ಕಟ್ಟಿನ 7, 8 ಅಥವಾ 9ನೇ ಎಲೆಯಾಗಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಹೊಂದಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು? ಎರಡನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಎಲೆಗಳ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಒಟ್ಟು 18 ಎಲೆಗಳಿರುವ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಕೆಳಗಿರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಎರಡನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಎಲೆಗಳನ್ನು ಹಂಚುವಾಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ತನ್ನ ಗುಂಪಿನ 7, 8 ಅಥವಾ 9ನೇ ಎಲೆಯಾಗಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ನಾವು ಮೊದಲನೆ ಹಂತದಲ್ಲಿ 27 ಎಲೆಗಳನ್ನು ಹಂಚಿದಾಗ 19ರಿಂದ 27ರವರೆಗಿನ ಎಲೆಗಳು ತಮ್ಮ ಗುಂಪಿನ 7,8 ಅಥವಾ 9ನೇ ಎಲೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 19ನೇ ಎಲೆಯು ಮೊದಲ ಗುಂಪಿನ 7ನೇ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಅಲಂಕರಿಸುತ್ತದೆ, 23ನೆಯದು ಎರಡನೇ ಗುಂಪಿನ 8ನೇ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹಾಗೂ 27ನೆಯದು ಮೂರನೇ ಗುಂಪಿನ 9ನೇ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಅಲಂಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಎರಡನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಎಲೆಗಳನ್ನು ಹಂಚುವಾಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ತನ್ನ ಗುಂಪಿನ 7, 8 ಅಥವಾ 9ನೇ ಎಲೆಯಾಗುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮೊದಲನೆ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಹಂಚಿದಾಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ 19ರಿಂದ 27ರವರೆಗಿನ ಒಂದು

ಎಲೆಯಾಗಿರುವುದಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ತರ್ಕಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಮೊದಲ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಎಲೆಗಳನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವಾಗ **(B)** ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು, ಅಂದರೆ, ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಇರಿಸುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ನಾವು **(B)**, **(T)**, **(B)** ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹಂತ III, II ಮತ್ತು I ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದರೆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯು ಕೊನೆಗೆ ಕಟ್ಟಿನ 21ನೇ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಅಲಂಕರಿಸುವಂತಾಗುತ್ತದೆ. **(T)** = 0, **(M)** = 1, **(B)** = 2 ಹಾಗೂ $21 - 1 = 20 = 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0$, ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಮ್ಮ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಕೊನೆಗೆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಮೇಲೆ 20 ಎಲೆಗಳಿರಲು ನಾವು **(B)**, **(T)**, **(B)** ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಹಂತದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು 20ನ್ನು ತ್ರಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದೇ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3. $n = 16$ ಆಗಿರಲಿ. ನಾವೀಗ ಮೂರು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದರೆ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ 16ನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವವರಿದ್ದೇವೆ.

16 = 9 + 7 ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂರನೆ ಕ್ರಿಯೆ (**M**) ಆಗಿರಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲೆ 9 ಎಲೆಗಳು ಇರುವಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಈಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಮೂರನೇ ಹಂತದ ತನ್ನ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 7 ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ನಾವು ಎರಡನೇ ಹಂತದ ಕೊನೆಗೆ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವಾಗ ನಾವು ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಇರುವ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ, ಕ್ರಿಯೆ (B) ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಅರ್ಥ. ಇದರ ಜೊತೆಗೆ, ಎರಡನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಹಂಚುವಾಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ತನ್ನದೇ ಗುಂಪಿನ 1, 2 ಅಥವಾ 3ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ಖಾತ್ರಿಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದ ರೀತಿಯ ವಾದದಿಂದ 1ರಿಂದ 9ರವರೆಗಿನ ಎಲೆಗಳು ತಮ್ಮದೇ ಗುಂಪಿನ 1, 2 ಅಥವಾ 3ನೇ ಸ್ಥಾನದ ಎಲೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಹೀಗಾಗಿ, ಮೊದಲ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಎಲೆಗಳನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವಾಗ (**T**) ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯನ್ನು 16ನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತರಲು ನಾವು ಹಂತ III, II ಮತ್ತು I ರಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ **(M)**, **(B)**, **(T)** ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎಂದಾಯಿತು.

(T) = 0, **(M)** = 1, **(B)** = 2 ಹಾಗೂ,

$$16 - 1 = 15 = 1\times3^2 + 2\times3^1 + 0\times3^0 \qquad (15)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಮ್ಮ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಮೇಲೆ 15 ಎಲೆಗಳಿವೆ ಎಂದಾಗಿ, ಅದನ್ನು **(T)**, **(B)**, **(M)** ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಸಾಧಿಸಬಹುದು ಎಂದಾಯಿತು. ಇದು 15ನ್ನು ತ್ರಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದೇ ಆಗಿದೆ.

ಗಣಿತರೀತ್ಯಾ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ

ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯನ್ನು ನಿಗದಿತ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತರಲು ಏನು ಮಾಡಬೇಕು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಕಣ್ಕಟ್ಟಿನ ಮೊದಲನೇ ಹಂತವನ್ನು ಪುನಃಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯನ್ನು ಕಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ ಅದನ್ನು ತೃಪ್ತಿಯಾಗುವಷ್ಟು ಕಲಸಿದ ಬಳಿಕ ಆ ಎಲೆ ಮೇಲಿನಿಂದ n_0 ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ, ಈಗ ಅದರ ಮೇಲೆ $n_0 - 1$ ಎಲೆಗಳಿವೆ ಎಂದಾಯಿತು. ನಾವು ಈಗ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ಈ 27 ಎಲೆಗಳನ್ನು 3 ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಲ್ಲೂ 9 ಎಲೆಗಳಿರುವಂತೆ ಹಂಚೋಣ. ರಹಸ್ಯದೆಲೆ ಯಾವ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲು

ಯಾವುದಾದರೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ತಿಳಿಸಿ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯು ಗುಂಪಿನ $[n_0/3]$ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆ. ಈಗ ನೀವು ಈ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿಧಾನಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

T: ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯಿರುವ ಗುಂಪನ್ನು ಉಳಿದೆರಡು ಗುಂಪುಗಳ **ಮೇಲೆ** ಇರಿಸುವುದು
M: ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯಿರುವ ಗುಂಪನ್ನು ಉಳಿದೆರಡು ಗುಂಪುಗಳ **ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ** ಇರಿಸುವುದು ಹಾಗೂ,
B: ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯಿರುವ ಗುಂಪನ್ನು ಉಳಿದೆರಡು ಗುಂಪುಗಳ **ಕೆಳಗೆ** ಇರಿಸುವುದು

ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು (**T**) ಆದರೆ, ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಸ್ಥಾನವು ಬದಲಾಗದೇ $[n_0/3]$ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು (**M**) ಆದರೆ, ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಸ್ಥಾನವು $9 + [n_0/3]$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ, ಏಕೆಂದರೆ, ಈಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲೆ 9 ಎಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು (**B**) ಆದರೆ, ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಸ್ಥಾನವು $18 + [n_0/3]$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ, ಏಕೆಂದರೆ, ಈಗ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯ ಗುಂಪಿನ ಮೇಲೆ 18 ಎಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ನಾವು ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು F_a ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

$$F_a(n_0) = 9a + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil, \qquad (6)$$

ಇಲ್ಲಿ a = 0, 1 ಅಥವಾ 2 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನಾವು ನಡೆಸುವ ಕ್ರಿಯೆ (T) ಆದರೆ, a ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದೇ ರೀತಿ, ಕ್ರಿಯೆ (M) ಆದಾಗ a ಬೆಲೆ 1 ಹಾಗೂ ಕ್ರಿಯೆ (B) ಆದಾಗ a ಬೆಲೆ 2 ಆಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ನಾವು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆ, n ಗೆ, a, b, c ε {0, 1, 2} ಗಳ ಬೆಲೆ ಹಾಗೂ 1 ಮತ್ತು 27ರ ನಡುವಿನ n_0 ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ

$$F_c(F_b(F_a(n_0))) = n. \qquad (7)$$

ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಈ ಕಣ್ಕಟ್ಟು ಕೆಲಸಮಾಡುವಂತೆ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿದೆ. a, b, c ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ನಾವು ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲೂ ಎಲೆಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುವಾಗ **(T)**, **(M)** ಅಥವಾ **(B)** ಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. ನಾವೀಗ $F_c(F_b(F_a(n_0)))$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳೋಣ:

$$F_a(n_0) = 9a + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil,$$
$$\therefore \; F_b(F_a(n_0)) = 9b + \left\lceil \frac{1}{3}\left(9a + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil\right) \right\rceil.$$

ಈಗ,

$$\frac{1}{3}\left(9a + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil\right) = \left\lceil \frac{1}{3}\left\lceil 9a + \frac{n_0}{3} \right\rceil \right\rceil$$
$$= 3a + \left\lceil \frac{n_0}{3^2} \right\rceil,$$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$F_b(F_a(n_0)) = 9b + 3a + \left\lceil \frac{n_0}{3^2} \right\rceil. \qquad (8)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯ ತರ್ಕವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ, $0 < [n_0/27] \leq 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $[n_0/3^3] = 1$ ಆಗಿ,

$$F_c\left(F_b\left(F_a\left(n_0\right)\right)\right) = 9c + 3b + a + \left\lceil \frac{n_0}{3^3} \right\rceil$$
$$= 9c + 3b + a + 1, \qquad (9)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ನಾವೀಗ ಕಣ್ಕಟ್ಟಿಗೆ ಮರಳಿದರೆ, ಮೇಲಿನ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯು 27 ಎಲೆಗಳ ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯನ್ನು n ನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ನೋಡಬೇಕೆಂದು ಬಯಸಿದರೆ ನಾವು a, b, c ε {0, 1, 2} ಗಳನ್ನು n = 9c + 3b + a + 1 ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ಅನ್ವಯವಾಗುವಂತೆ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$n = (cba)_{\text{ತ್ರಿಮಾನ}} + 1$$

ಇಲ್ಲಿ ಕೀಳ್ಪಂಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ "ತ್ರಿಮಾನ" ಎಂಬುದು ನಾವು (n – 1) ಅನ್ನು ತ್ರಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಾವು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆ n = 17 ಆದರೆ, ನಾವು $9c+3b+a = 16$ ಅನ್ವಯವಾಗುವ *a, b, c* ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ನಾವೇನಾದರೂ 16ನ್ನು 9ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ 1 ಹಾಗೂ 7 ಶೇಷವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, c = 1 ಆಗುತ್ತದೆ. ನಾವು 7ನ್ನು 3ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ 2 ಹಾಗೂ ಶೇಷ 1 ದೊರಕಿ, b = 2 ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ, a = 1 ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $16 = 121_{\text{ತ್ರಿಮಾನ}}$ ಆಗಿ, ನಾವು ಮೂರು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ **(M)**, **(B)**, **(M)** ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ 17ನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಸರಿಯುವಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ, ನಾವೇನಾದರೂ ರಹಸ್ಯದೆಲೆ 25ನೇ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಅಲಂಕರಿಸಬೇಕು ಎಂದು ಬಯಸಿದರೆ, ನಾವು ಮಾಡಬೇಕಿರುವುದಿಷ್ಟೇ: 24ನ್ನು ತ್ರಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 24 = 2×9 + 2×3 + 0×1; a = 0, b = 2, c = 2 ಬರೆಯುವುದು. ಹೀಗಾಗಿ, ಈ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ರಹಸ್ಯದೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಿರುವ ವಿಧಾನವು ಕ್ರಮವಾಗಿ **(T)**, **(B)**, **(B)** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮುಕ್ತಾಯ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲು 27 ಇಸ್ಪೀಟೆಲೆಗಳ ಕಣ್ಕಟ್ಟು ಒಂದು ರೋಮಾಂಚಕ ವಿಧಾನ. ಈ ಕಣ್ಕಟ್ಟಿನ ಹಿಂದಿನ ತರ್ಕವಾದರೂ ಏನು ಎಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಲೆಕೆಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡಿತು. ಇದೇ ಕಣ್ಕಟ್ಟನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅನೇಕ ಬಾರಿ ತೋರಿಸಿದ್ದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕೊನೆಗೆ ಒಂದು ವಿನ್ಯಾಸವು ಹೊರಹೊಮ್ಮುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಂತಾಯಿತು. ಈ ಇಂದ್ರಜಾಲವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತ್ರಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿಯಲು ಉತ್ಸಾಹತೋರುವಂತೆ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ನಾವು ಯಶಸ್ವಿಗಳಾದೆವು.

ತ್ರಿಮಾನಪದ್ಧತಿ

ತ್ರಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯೆಂದರೆ 3ರ ಘಾತಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಸ್ತರಣೆ ಎಂದರ್ಥ. ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ ಹಲವರಿಗೆ ದ್ವಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯ ಪರಿಚಯ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ನಾವು 0 ಮತ್ತು 1 ಎರಡಂಕಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ದ್ವಿಮಾನಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 2ರ ವಿಭಿನ್ನ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$6 = 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 = (110)_{\text{ದ್ವಿಮಾನ}}$

$7 = 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 = (111)_{\text{ದ್ವಿಮಾನ}}$

$11 = 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 = (1011)_{\text{ದ್ವಿಮಾನ}}$

$19 = 1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 = (10011)_{\text{ದ್ವಿಮಾನ}}$

ಇತ್ಯಾದಿ. ಪ್ರತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಒಂದು ಅನನ್ಯರೂಪದಲ್ಲಿ 2ರ ವಿಭಿನ್ನ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದಾಗಿದೆ ಎಂಬ ತಥ್ಯ ಈ ಪದ್ಧತಿಯ ಆಧಾರಸ್ತಂಭವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ "ಅನನ್ಯ" ಎಂದರೆ ಈ ರೀತಿ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಏಕೈಕ ವಿಧಾನವಿದೆ ಎಂದರ್ಥ. ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದರ ಇಂತಹ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ 2ರ ಪ್ರತಿ ಘಾತವೂ ಇರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಇದ್ದರೆ, ಆ ಸ್ಥಾನವನ್ನು 1ರಿಂದಲೂ, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ 0 ಯಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, ಪ್ರತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ 3ರ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದಾಗಿದೆ. ಆದರೆ, ಇಲ್ಲಿ ನಾವು "3ರ ವಿಭಿನ್ನ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ" ಬರೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 6ನ್ನು 3ರ ವಿಭಿನ್ನ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ನಾವು ಪ್ರತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ 3ರ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಸಬೇಕೆಂದರೆ ಕೆಲವು ಮಾರ್ಪಾಟುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ನಾವು ಪ್ರತಿ ಘಾತವನ್ನೂ *ಬಳಸದಿರಲು, ಒಮ್ಮೆ ಬಳಸಲು ಅಥವಾ ಎರಡು ಸಲ ಬಳಸಲು ಸಮ್ಮತಿಸಿದರೆ* ಇದನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$4 = 1x3^1 + 1x3^0 = (11)_{\text{ತ್ರಿಮಾನ}}$

$5 = 1x3^1 + 2x3^0 = (12)_{\text{ತ್ರಿಮಾನ}}$

$6 = 2x3^1 + 0x3^0 = (20)_{\text{ತ್ರಿಮಾನ}}$

$7 = 2x3^1 + 1x3^0 = (21)_{\text{ತ್ರಿಮಾನ}}$

$8 = 2x3^1 + 2x3^0 = (22)_{\text{ತ್ರಿಮಾನ}}$

ಇತ್ಯಾದಿ. ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಯೂ ಅನನ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉಲ್ಲೇಖಗಳು

1. https://www.youtube.com/watch?v=gcgvFTfOpD8
2. ಗಾರ್ಡ್ನರ್, ಮಾರ್ಟಿನ್. *ಮ್ಯಾಥಮಾಟಿಕ್ಸ್, ಮ್ಯಾಜಿಕ್ ಎಂಡ್ ಮಿಸ್ಟರಿ.* ಡೋವರ್ ಪಬ್ಲಿಕೇಷನ್ಸ್ 1956.

ಸುಹಾಸ್ ಸಾಹಾ ಅವರು ಕೊಯಮತ್ತೂರಿನ "ಈಶ ಹೋಮ್ ಸ್ಕೂಲ್"ನಲ್ಲಿ 9-12ನೇ ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಗಣಿತ ಬೋಧಿಸುತ್ತಾರೆ. "ಈಶ" ಸೇರುವ ಮುನ್ನ ಅವರು ಜೀವವಿಮಾ ವಲಯದಲ್ಲಿ ವಿಮಾಗಣಕರಾಗಿ ಕೆಲಸಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರು. ಐಐಟಿ ಕಾನ್ಪುರದಿಂದ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸ್ನಾತಕೋತ್ತರ (ಇಂಟೆಗ್ರೇಟೆಡ್) ಪದವಿ ಪಡೆದ ಇವರು ಮುಂಬೈನ "ಇಂದಿರಾ ಗಾಂಧಿ ವಿಕಾಸ್ ಅನುಸಂಧಾನ್" ಸಂಸ್ಥೆಯಿಂದ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಂಫಿಲ್ ಪದವಿಯನ್ನೂ, ಅಮೇರಿಕಾದ ಮಿನೆಸೋಟ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಿಂದ "ಹಣಕಾಸು ಆರ್ಥಿಕತೆ"ಯಲ್ಲಿ ಡಾಕ್ಟರೇಟ್ ಪದವಿಯನ್ನೂ ಸಂಪಾದಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇವರನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದಾದ ಮಿಂಚಂಚೆ ವಿಳಾಸ: suhas.s@ishahomeschool.org.